Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Tea Crnobrnja

Nenegativne i M–matrice

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Tea Crnobrnja

Nenegativne i M–matrice

Završni rad

Mentor: izv.prof.dr.sc. Darija Marković

Osijek, 2019.

Sažetak

U ovome radu proučavat ćemo posebnu kategoriju matrica. Definirat ćemo nenegativne matrice te uvesti pojam M–matrice. Navest ćemo primjere te karakterizaciju navedenih matrica. Promotrit ćemo nenegativne matrice čiji inverzi su M–matrice. Ako je A nenegativna matrica reda n i A^{-1} je M–matrica, onda su gotovo glavni minori od A svakog reda nenegativni. Pokazat ćemo da je nesingularna matrica A reda p inverzna M–matrica ako i samo ako je $Q^TAQ + D$ inverzna matrica reda n, pri čemu je Q nenegativna matrica dimenzija $p \times n$, s točno jednim pozitivnim elementom u svakom stupcu i D je pozitivna dijagonalna matrica. Ovo obuhvaća nekoliko činjenica o inverzima M–matrica kao posebnim slučajevima.

Ključne riječi: M–matrice, nenegativne matrice, inverz, spektralni radijus, primitivne matrice, Stieltjesova matrica

Abstract

This paper studies special matrix categories. We will define nonegative and introduce the term M–matrices. A characterization of a class of totally nonnegative matrices whose inverses are M–matrices is given. It is then shown that if A is nonnegative of order n and A^{-1} is an M–matrix, then the almost principal minors of A of all orders are nonnegative. We show that a nonsingular p-by-p matrix A is an inverse M–matrix if and only if $Q^TAQ + D$ is an n-by-n inverse M–matrix whenever Q is a p-by-n nonnegative matrix with exactly one positive entry in each column and D is a positive diagonal matrix. This includes few facts about inverse M–matrices as special cases.

Key words: M–matrices, nonnegative matrices, inverse, spectral radius, primitive matrices, Stieltjes matrix

Sadržaj

1 Uvod

Tema ovog rada su nenegativne i M–matrice.

U prvom dijelu ponovit ćemo već poznate pojmove koji će biti korišteni u radu. Definirat ćemo navedene matrice, navesti primjere te ustanoviti da postoji veza između njih kojom ćemo se baviti u drugom dijelu rada.

Nenegativnim matricama smatramo kvadratne matrice čiji elementi su veći ili jednaki nuli. Matrice čiji elementi su strogo veći od nule nazivamo pozitivnim matricama. Matrica je potpuno nenegativna ako su svi njeni minori nenegativni odnosno potpuno pozitivna ako su svi njeni minori pozitivni.

Nakon što uvedemo pojam M–matrice, definirat ćemo reducibilne i ireducibilne matrice te spomenuti pojam Stieltjesove matrice. M–matrice se u matematici koriste za uspostavljanje granica na svojstvenim vrijednostima i utvrđivanje kriterija konvergencije iterativnih metoda za rješavanje sustava linearnih jednadžbi.

Osim u matematici, javljaju se u proučavanju konačnih Markovljevih lanaca u području teorije vjerojatnosti te u teoriji čekanja. Ekonomisti su proučavali M–matrice u vezi s brutom zamjenjivosti, stabilnošću opće ravnoteže i Leontiefovom input-output analizom u ekonomskim sustavima. U inženjerstvu, M–matrice se javljaju u problemima stabilnosti te u teoriji kontrole.

Oznaka M_{mn} označavat će vektorski prostor matrica tipa $m \times n$ dok će M_n označavati vektorski prostor kvadratnih matrica reda n.

Neka je $A = (a_{ij}) \in M_{mn}$ realna matrica. Uvedimo sljedeće oznake: $A \geq 0$ predstavlja $a_{ij} \geq 0$ za svaki i, j, $A > 0$ znači $A \geq 0$ i $A \neq 0$, $A \gg 0$ označava $a_{ij} > 0$ za svaki i, j.

2 Osnovni pojmovi

2.1 Nenegativne matrice

Sljedeći pojmovi potrebni su nam za razumijevanje ovog rada. Sve definicije preuzete su iz [1], [2] i [5].

Nenegativnim matricama smatramo kvadratne matrice čiji elementi su veći ili jednaki nuli. Matrice čiji elementi su strogo veći od nule nazivamo pozitivnim matricama. Matrica je potpuno nenegativna ako su svi njeni minori nenegativni odnosno potpuno pozitivna ako su svi njeni minori pozitivni.

Promotrimo sljedeće matrice: $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

Matrica A je nenegativna, B je pozitivna, C je potpuno nenegativna te je D potpuno pozitivna.

Definicija 2.1. *Kaže se da je matrica $A \in M_n$ regularna ako postoji matrica $B \in M_n$ takva da vrijedi $AB = BA = I$. U tom se slučaju matrica B zove multiplikativni inverz ili inverzna matrica od A i označava s A^{-1}. Za matricu $A \in M_n$ koja nema multiplikativni inverz kažemo da je singularna.*

Neka su $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$. Matrica A je regularna dok je B singularna.

Definicija 2.2. *Neka je $\mathbb{F}$ polje i $A \in M_n(\mathbb{F})$. Kažemo da je skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijedost matrice A ako postoji $x \in M_{n1}(\mathbb{F})$, $x \neq 0$ takav da je $Ax = \lambda x$. Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A naziva se spektar matrice A i označava sa $\sigma(A)$.*
Skup $V_A(\lambda) = \{x : Ax = \lambda x\}$ naziva se svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.

Vektor x iz navedene definicije naziva se svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda \in \sigma(A)$ kao nultočke svojstvenog polinoma nazivamo algebarska kratnost od λ. Svojstvene vrijednosti čija je algebarska kratnost jednaka 1 nazivaju se jednostavnim svojstvenim vrijednostima.

Definicija 2.3. *Spektralni radijus matrice $A \in M_n$ definiramo sa:*

$$\rho(A) = max\{\ |\lambda|\ : \lambda \textit{ svojstvena vrijednost matrice } A\}.$$

Primjer 2.4. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(2 - \lambda) \implies \sigma(A) = \{1, 2\}$, $\rho(A) = 2$.

Teorem 2.5. *Za nenegativnu kvadratnu matricu A vrijede sljedeće tvrdnje:*

a) $\rho(A)$, spektralni radijus od A, je svojstvena vrijednost,

b) A ima nenegativan svojstveni vektor koji odgovara $\rho(A)$,

c) A^T ima nenegativan svojstveni vektor koji odgovara $\rho(A)$.

Tvrdnje prethodnog teorema mogu se lako pokazati.

Definicija 2.6. *Matrica $A \in M_n$ je kongruentna matrici E ako postoji matrica permutacije P takva da je $PAP^T = E$. A je reducibilna ako je kongruentna matrici $E = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$, pri čemu su B i D kvadratne matrice ili ako je n=1 i A=0. U suprotnom, A je ireducibilna.*

Dakle, matrica A je reducibilna ako nije ireducibilna.

Promotrimo sljedeće matrice: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$. A je reducibilna dok je B ireducibilna.

Dokazi sljedećih tvrdnji mogu se pronaći u [2].

Teorem 2.7. *Svaki od sljedećih uvjeta karakterizira ireducibilnost nenegativne matrice $A \in M_n$ $(n > 1)$:*

a) Niti jedan nenegativan svojstveni vektor od A nema koordinatu 0.

b) A ima jedinstven (do na množenje skalarom) nenegativan svojstveni vektor, koji je pozitivan.

c) $\alpha x \geq Ax, x > 0 \Rightarrow x \gg 0$.

d) $(I + A)^{n-1} \gg 0$

e) A^T je ireducibilna.

Nenegativne ireducibilne matrice uključuju pozitivne.

Teorem 2.8.

a) Ako je matrica A pozitivna, onda je $\rho(A)$ jednostavna svojstvena vrijednost, veća od bilo koje druge svojstvene vrijednosti.

b) Ako je $A \geq 0$ ireducibilna, onda je $\rho(A)$ jednostavna svojstvena vrijednost, svaka svojstvena vrijednost od A istog modula je također jednostavna, A ima pozitivan svojstveni vektor x koji odgovara $\rho(A)$ i svaki nenegativan svojstveni vektor od A je višekratnik od x.

Korolar 2.9.

a) Ako je $0 \leq A \leq B$, onda je $\rho(A) \leq \rho(B)$.

b) Ako je $0 \leq A < B$ i $A + B$ je ireducibilna, onda je $\rho(A) < \rho(B)$.

Korolar 2.10.

a) Ako je B glavna podmatrica od $A \geq 0$, onda je $\rho(B) \leq \rho(A)$.

b) $\rho(A)$ je svojstvena vrijednost glavne podmatrice nenegativne matrice A ako i samo ako je A reducibilna.

Teorem 2.11. *Za nenegativnu matricu A sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) *A je ireducibilna i $\rho(A)$ je veći od bilo koje druge svojstvene vrijednosti.*

b) *Jedini neprazan podskup od $\mathbb{R}^n_+$, koji ostaje invarijantan za A, je $\{0\}$.*

c) *Postoji prirodan broj m takav da je A^m pozitivna.*

Definicija 2.12. *Matrice koje zadovoljavaju uvjete prethodnog teorema nazivaju se primitivne matrice.*

Korolar 2.13. *Ako je A primitivna i l je prirodan broj, onda su A^T i A^l primitivne.*

Promotrimo sljedeće primjere: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ je primitivna matrica, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ nije primitivna.

Korolar 2.14.

a) *Ako je $A \geq 0$ ireducibilna i $B \geq 0$, onda je $A + B$ ireducibilna.*

b) *Ako je $A \geq 0$ primitivna i $B \geq 0$, onda je $A + B$ primitivna.*

Teorem 2.15. *Za $A \geq 0$,*

$$\alpha x \leq Ax \Rightarrow \alpha \leq \rho(A)$$

i

$$Ax < \beta x, x > 0 \Rightarrow \alpha < \rho(A) < \beta (i\ x \gg 0).$$

Dodatno, ako je A ireducibilna, onda

$$\alpha x < Ax < \beta x, x > 0 \Rightarrow \alpha < \rho(A) < \beta\ (i\ x \gg 0).$$

Korolar 2.16. *Ako je x pozitivan svojstveni vektor nenegativne matrice A onda x odgovara $\rho(A)$.*

2.2 M–matrice

Vrlo često problemi u raznim znanostima mogu se svesti na probleme koji uključuju matrice koje imaju neku posebnu strukturu. Jedna od najčešćih situacija je kada matrica A ima nepozitivne nedijagonalne elemente i nenegativne dijagonalne elemente. Odnosno, A je konačna matrica sljedećeg tipa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} & \cdots \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

pri čemu su a_{ij} nenegativni. Budući da A možemo izraziti u obliku:

$$A = sI - B, s > 0, B \geq 0 \tag{1}$$

nije iznenađujuća činjenica da teorija nenegativnih matrica igra dominantnu ulogu u proučavanju određenih tipova ovakvih matrica. Matrice oblika (1) vrlo često se pojavljuju u vezi s linearnim ili nelinearnim jednadžbama, svojstvenim problemom te u različitim područjima uključujući metode konačnih razlika za parcijalne diferencijalne jednadžbe, modele proizvodnje i rasta u ekonomiji, Markovljeve procese u vjerojatnosti i statistici ...
Označimo:

$$\mathbb{Z}^{n\times n} = \{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) : a_{ij} \leq 0, i \neq j\}$$

Definirajmo sada posebnu podvrstu matrica u $\mathbb{Z}^{n\times n}$ koju nazivamo M–matrice.

Definicija 2.17. *Matrica $A = (a_{ij})$ naziva se M–matrica ako je $a_{ij} \leq 0$ za svaki $i \neq j$ i svi glavni minori od A su pozitivni.*

Navedimo nekoliko primjera M–matrica: $\begin{bmatrix} 8 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$.

Definicija 2.18. *Svaku matricu A oblika (1) za koju je $s \geq \rho(B)$*[1]*, nazivamo M–matrica.*

Označimo $\mathscr{M}$ skup svih M–matrica te $\mathscr{A}$ skup svih matrica $A = (a_{ij})$ koje zadovoljavaju $a_{ii} > 0$ za svaki i te $a_{ij} \leq 0$ za svaki $i \neq j$.

Teorem 2.19. *Neka je $A \in \mathscr{A}$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) $A = \lambda_0 I - B$ za nenegativne matrice B i $\lambda_0 > \rho$, gdje je ρ maksimalna svojstvena vrijednost od B.

b) Realni dio svake svojstvene vrijednosti od A je pozitivan.

c) Svi glavni minori od A su pozitivni.

d) Svi vodeći glavni minori od A su pozitivni.

e) Postoji A^{-1} i vrijedi $A^{-1} \geqslant 0$.

f) Postoji vektor $x > 0$ takav da je $Ax > 0$.

g) Ako je $B \in \mathscr{A}$ i $B \geqslant A$, onda postoji B^{-1}.

h) Postoji dijagonalna matrica $D \in \mathscr{A}$ takva da je $ADe > 0$, pri čemu je e vektor čije komponente su sve jednake 1.

i) Postoji donjetrokutasta matrica T_0 i gornjetrokutasta matrica T_1 takve da vrijedi: T_0, $T_1 \in \mathscr{A}$, svi vodeći glavni minori od T_0 i T_1 su pozitivni i $A = T_0 \cdot T_1$.

Dokaz prethodnog teorema možete pogledati u [5].

[1] spektralni radijus od B

Definicija 2.20. *Matrica $A \in \mathscr{A}$ naziva se M–matrica ako zadovoljava bilo koji od uvjeta prethodnog teorema.*

Neka je u nastavku A matrica reda n, α i β strogo rastući nizovi u $\{1, 2, \cdots, n\}$. $A[\alpha, \beta]$ označava podmatricu od A čiji retci i stupci su određeni s α i β. $A(\alpha, \beta)$ označava komplementarnu podmatricu od $A[\alpha, \beta]$, $\det A[\alpha, \beta]$ je glavni minor od A kadgod je $\alpha = \beta$. Nadalje, $\det A[\alpha, \alpha]$, gdje je $\alpha = \{1, 2, \cdots, n - r\}$ za neke r, naziva se vodeći glavni minor.

Korolar 2.21. *Neka je $A \in \mathscr{A}$.*

a) Sve gornjetrokutaste i donjetrokutaste matrice u $\mathscr{A}$ su M–matrice.

b) Ako je red od $A \leq 3$, onda je $A \in \mathscr{M}$ ako i samo ako je $\det A > 0$.

c) Ako je red od $A \geq 3$,onda je A M–matrica ako i samo ako je $\det A[\alpha, \alpha] > 0$ za sve $\alpha \in \{1, 2, \ldots, n\}$ čija duljina je veća od 2. Specijalno, ako je A reda 4 onda vrijedi $A \in \mathscr{M}$ ako i samo ako $\det A(n, n) > 0$ i $\det A > 0$.

d) Ako je A M–matrica, onda je A^k M–matrica ako i samo ako $A^k \in \mathscr{A}$.

e) Ako je A blok matrica $A = \begin{bmatrix} B & E \\ 0 & D \end{bmatrix}$, onda je $A \in \mathscr{M}$ ako i samo ako B,$D \in \mathscr{M}$.

Teorem 2.22. *Neka $A = (a_{ij})$ zadovoljava uvjete: $a_{ii} \geq 0$ za svaki i te $a_{ij} \leq 0$ za $i \neq j$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

a) $A = \lambda_0 I - B$ za neke nenegativne matrice B i neke $\lambda_0 \geq \rho$, gdje je ρ maksimalna (nenegativna) svojstvena vrijednost od B.

b) Realni dio svake nenul svojstvene vrijednosti od A je pozitivan.

c) Svi glavni minori od A su nenegativni.

Dokaz.

a) $\Rightarrow$ b) Neka je $\tau = \alpha + \beta i$ svojstvena vrijednost od A takva da vrijedi:

$$0 = \det[\tau I - A] = \det[\tau I - (\lambda_0 I - B)] = \det[(\tau - \lambda_0)I + B] = \det[(\lambda_0 - \tau)I - B].$$

Dakle, $\lambda_0 - \tau = (\lambda_0 - \alpha) - \beta i$ je svojstvena vrijednost od B. Ako je $\alpha < 0$, onda je $\lambda_0 - \alpha > \lambda_0 \geq 0$ pa je $|\lambda_0 - \tau|^2 = (\lambda_0 - \alpha)^2 + \beta^2 > \lambda_0^2$ ili $|\lambda_0 - \tau| > \lambda_0 \geq \rho$. Ovo je kontradikcija s maksimalnošću od ρ. Stoga $\alpha \geq 0$. Ako je $\alpha = 0$ i $\beta \neq 0$, onda je $|\lambda_0 - \tau|^2 = |\lambda_0 - \beta i|^2 = \lambda_0^2 + \beta^2 > \lambda_0^2$ te dobivamo kontradikciju kao i ranije. Stoga, realni dio svake nenul svojstvene vrijednosti je pozitivan.

b) $\Rightarrow$ c) Postoji maksimalni nenegativan dijagonalni element za A i možemo pretpostaviti $\lambda_0 = a_{11}$. Neka je sada $A = \lambda_0 I - B$ ($\lambda_0 \geq 0$), pri čemu je $b_{ij} = -a_{ij}$ za $i \neq j$ i $b_{11} = 0$, $b_{22} = \lambda_0 - a_{22}, \ldots, b_{nn} = \lambda_0 - a_{nn}$. Neka je ρ maksimalna (nenegativna) svojstvena vrijednost od B. Budući da je $\lambda_0 - \rho$ svojstvena vrijednost od A, prema pretpostavci $\lambda_0 - \rho \geq 0$ ili $\lambda_0 \geq \rho$. Ako je γ maksimalna svojstvena vrijednost bilo koje glavne podmatrice od B, onda je $\rho \geq \gamma$. Stoga, po sličnom argumentu iz prvog dijela dokaza, možemo pokazati da svaka nenul

svojstvena vrijednost bilo koje glavne podmatrice od A ima pozitivan realni dio. Budući da su sve glavne podmatrice od A realne i njihove determinante su produkt vlastitih svojstvenih vrijednosti, slijedi da je svaki glavni minor nenegativan.
c) $\Rightarrow$ a) Kao u drugoj implikaciji, $A = \lambda_0 I - B$. Želimo pokazati da je $\lambda_0 \geq \rho$, gdje je ρ maksimalna svojstvena vrijednost od B. Ako je $\tau > 0$,

$$\det[(\tau+\lambda_0)I - B] = \det[\tau I + (\lambda_0 I - B)] = \det(\tau I + A) = \sum_{k=0}^{n}[\tau^{n-k}M_k],$$

gdje M_k označava sumu svih glavnih minora reda k ($M_0 = 1$) od A. Nadalje, ako su svi glavni minori od A nenegativni, $\det[(\tau+\lambda_0)I - B] \geq 0$.
Slučaj 1: Ako su svi glavni minori od A jednaki nuli, onda je $\lambda_0 = 0$ i $A = -B$. No tada su svojstvene vrijednosti od A i B sve jednake nuli tako da je $\lambda_0 \geq \rho$.
Slučaj 2: Ako su neki glavni minori od A pozitivni, onda je $\det[(\tau+\lambda_0)I - B] > 0$ za svaki $\tau > 0$. To implicira da niti jedan realan broj $\tau + \lambda_0 > \lambda_0$ ne može biti svojstvena vrijednost od B i zato je $\lambda_0 \geq \rho$. □

Definicija 2.23. *Za matricu A kažemo da je inverz pozitivna ako je regularna i* $A^{-1} \geq 0$.

Teorem 2.24. *Neka je* $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. *Sljedeće tvrdnje ekvivalentne su tvrdnji: A je nesingularna M–matrica.*

a) $A + D$ *je inverz pozitivna za svaku nenegativnu dijagonalnu matricu* D.

b) $A + \alpha I$ *je inverz pozitivna za svaki skalar* $\alpha \geq 0$.

c) Svaka glavna podmatrica od A je inverz pozitivna.

d) Svaka glavna podmatrica od A redova 1,2 i n je inverz pozitivna.

Dokaz. Pretpostavimo da je A nesingularna M–matrica i neka je D pozitivna dijagonalna matrica. Tada budući da su svi glavni minori od A pozitivni slijedi da su svi glavni minori od $A + D$ pozitivni. Iz uvjeta A_1, Teorema 2.2.3 iz [2], $A + D$ je nesingularna M–matrica. Tada iz Definicije 2.23, $A + D$ je inverz pozitivna. Dakle, a) i b) vrijede. Također iz Teorema 2.2.3, svaka glavna podmatrica nesingularne M–matrice je također nesingularna M–matrica. Dakle vrijede c) i d). Pretpostavimo sada da je $A \in M_n(\mathbb{R})$ te da je $A + \alpha I$ inverz pozitivna za svaki $\alpha \geq 0$. Slijedi $A^{-1} \geq 0$ za $\alpha = 0$. Po Definiciji 2.23 kako bismo pokazali da je A nesingularna M–matrica trebamo samo utvrditi da je $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Pretpostavimo da A ima pozitivne nedijagonalne elemente, $a_{ij} > 0, i \neq j$. Tada za proizvoljno mali $\alpha > 0$,

$$(I + \alpha A)^{-1} = I - \alpha A + (\alpha A)^2 - (\alpha A)^3 + \ldots$$

ima negativne (i,j) elemente. To je kontradikcija s pretpostavkom

$$0 \leq \left(A + \frac{I}{\alpha}\right)^{-1} = \alpha(I + \alpha A)^{-1}.$$

Budući da a) $\Rightarrow$ b) također slijedi da ako a) vrijedi za $A \in M_n(\mathbb{R})$ onda je A nenegativna singularna M–matrica. Neka je sada $A \in M_n(\mathbb{R})$ sa svojstvom da su sve njene glavne podmatrice redova 1,2 i n inverz pozitivne. Tada A ima sve pozitivne dijagonalne elemente i vrijedi $A^{-1} \geq 0$. Preostaje pokazati da je $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Neka je

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

glavna podmatrica od A reda 2. Tada je $a > 0, d > 0$, i

$$B^{-1} = (ad - bc)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \geq 0.$$

Iz pozitivnosti dijagonalnih elemenata matrice B slijedi da je $b \leq 0$ i $c \leq 0$. Zaključujemo kako A ima sve nepozitivne nedijagonalne elemente. Konačno, iz c) $\Rightarrow$ d) slijedi da vrijedi c) za $A \in M_n(\mathbb{R})$, tada je A nesingularna M–matrica.

□

Definicija 2.25. *Simetrična nesingularna matrica naziva se Stieltjesova matrica.*

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ je primjer takve matrice.

Lema 2.26. *Simetrična matrica $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ je Stieltjesova matrica ako i samo ako je A pozitivno definitna.*

Teorem 2.27. *Neka je $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ ireducibilna. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne s tvrdnjom: A je nesingularna M - matrica:*

a) $A^{-1} \gg 0$.

b) $Ax > 0$ *za neki* $x \gg 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da je A nesingularna M–matrica. Za $K = \mathbb{R}^n_+$ iz [2] u Korolaru 5.2.10., slijedi da je $A^{-1} \gg 0$ pa vrijedi a). Uvjet b) slijedi direktno iz Teorema 2.2.3. Obrnuto, ako a) vrijedi onda je A nesingularna M–matrica iz Teorema 2.2.3. .Preostaje razmotriti uvjet b). Pretpostavimo da je $Ax > 0$ za neki $x \gg 0$. Tada, budući da je A ireducibilna slijedi da je $\hat{A}$ definirana u uvjetu L_{33} Teorema 2.2.3 ireducibilna iz čega slijedi da je A nesingularna M–matrica. □

Budući da svojstvene vrijednosti proizvoljne matrice A često nisu racionalne, aproksimacija igra veliku ulogu u određivanju spektra od A. Poznavanje granica svojstvenih vrijednosti može odrediti kada će određeni iterativni proces konvergirati. Na primjer, pogledajmo sustav linearnih jednadžbi

$$Ax = b. \tag{2}$$

Kada je A nesingularna, mnoge iterativne metode za rješavanje (2) mogu se dobiti rastavom matrice A na matrice M i N te korištenjem iteracije

$$x^{i+1} = M^{-1}Nx^i + M^{-1}b. \tag{3}$$

Navedena iteracija konvergira za svaki x^0 ako i samo ako je spektralni radijus od $M^{-1}N$ manji od 1.

Budući da su spektar od A i A^{-1} povezani, informacije o spektru od A^{-1} daju informacije o spektru od A. Dakle, ako je $A^{-1} > 0$ (što je slučaj s nesingularnim M–matricama) imamo informacije o A.

3 Nenegativne matrice čiji inverzi su M–matrice

U ovom poglavlju promotrit ćemo povezanost između nenegativnih i M–matrica. Ako je A nenegativna matrica reda n i A^{-1} M–matrica, onda su svi glavni minori od A nenegativni. Osnovni pojmovi korišteni u ovom poglavlju preuzeti su iz [3] i [4].

Neka je $A = (a_{ij}) \in M_n$. Pišemo $A \geqslant 0$ ako je $a_{ij} \geqslant 0$ za svaki par (i, j). U tom slučaju kažemo da je A potpuno nenegativna.

Za nesingularnu kvadratnu matricu A kažemo da je inverzna M–matrica ako je A^{-1} M–matrica. Inverzna M–matrica je nenegativna. Nesingularna matrica s nepozitivnim nedijagonalnim elementima je M–matrica ako i samo ako je njen inverz nenegativan. Slijedi da je nesingularna nenegativna matrica inverzna M–matrica ako i samo ako njen inverz ima nepozitivne nedijagonalne elemente.

Lema 3.1. *Neka je A realna matrica reda n sa nepozitivnim nedijagonalnim elementima. A je M–matrica ako i samo ako je A nesingularna i $A^{-1} \geqslant 0$.*

Teorem 3.2. *Neka je $A \in M_p$ inverzna M–matrica i $Q \in M_{pn}$ nenegativna matrica s točno jednim pozitivnim elementom u svakom stupcu. Tada je*

$$Q^T AQ + D$$

inverzna M–matrica za bilo koju pozitivnu dijagonalnu matricu $D \in M_n$.

Dokaz. Budući da su inverzi M–matrica invarijantni pod pozitivnim dijagonalnim množenjem i sličnosti permutacija bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da matrica Q ima oblik

$$Q=\begin{bmatrix} e_1^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2^T & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e_q^T \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gdje je $e_i^T = (1, 1, \ldots, 1) \in M_{1m_i}, i = 1, \ldots, q$. Budući da je glavna podmatrica inverza M–matrice opet inverz M–matrice [2,4], zbog pravila računanja s blok–matricama slijedi da u nastavku bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $q = p$, tj. da ne postoje nul retci na dnu matrice Q. Definirajmo sličnu blok–matricu $\hat{Q}$ na način:

$$\hat{Q}=\begin{bmatrix} f_1^T & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & f_2^T & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_q^T \end{bmatrix}$$

gdje je $f_i^T = (1, 0, \ldots, 0) \in M_{1m_i}$, $i = 1, \ldots, p$. Sada za $i = 1, \ldots, p$, definiramo $m_i \times m_i$ matrice Y_i

$$Y_i=\begin{bmatrix} m_i - 1 & -\hat{e}_i^T \\ -\hat{e}_i & I \end{bmatrix}$$

pri čemu je $e_i^T = (1, 1, \hat{\ldots}, 1) \in M_{m_i-11}$ i U_i definirana kao

$$U_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

gdje je jedinični blok $(m_i - 1) \times (m_i - 1)$. Neka je

$$Y = Y_1 \bigoplus Y_2 \bigoplus \ldots \bigoplus Y_p$$

i

$$U = U_1 \bigoplus U_2 \bigoplus \ldots \bigoplus U_p.$$

Za $\varepsilon \neq 0$ može se pokazati da vrijedi

$$(Q^T AQ + \varepsilon U)^{-1} = \hat{Q}^T A^{-1} \hat{Q} + \frac{1}{\varepsilon} Y.$$

Budući da desna strana ima nepozitivne nedijagonalne elemente, slijedi da je $Q^T AQ + \varepsilon U$ inverzna M–matrica za svaki $\varepsilon > 0$. Za bilo koju pozitivnu dijagonalnu matricu D, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $U \leq D$, što slijedi iz činjenice da je $Q^T AQ + D$ inverzna M–matrica. Pretpostavili smo da je $p \leq n$ no zbog pravila računanja s blok–matricama pokazuje se da nema smanjenja općenitosti koristeći tu pretpostavku.

□

Lema 3.3. *Ako je $A \in M_n$ inverzna M–matrica i $D \in M_n$ pozitivna dijagonalna matrica, onda je $A + D$ također inverzna M–matrica.*

Ova lema je poseban slučaj Teorema 3.2. Slijedi da je nesingularna nenegativna kvadratna matrica reda n inverzna M–matrica ako i samo ako je $A+D$ inverzna M–matrica za sve pozitivne dijagonalne matrice D.

Označimo M_n^{-1} skup inverznih matrica reda n te neka je $\overline{M_n^{-1}}$ zatvarač toga skupa.

Teorem 3.4. *Neka je $A \in M_n$ nenegativna matrica. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) $A \in \overline{M_n^{-1}}$,

b) $(A + D)^{-1} \leq D^{-1}$ *za svaku pozitivnu dijagonalnu matricu D,*

c) $(A + D)^{-1}$ *je M–matrica za svaku pozitivnu dijagonalnu matricu D,*

d) $(A + \alpha I)^{-1}$ *je M–matrica za svaki $\alpha > 0$,*

e) $(A + D)^{-1} A \geq 0$ *za svaku pozitivnu dijagonalnu matricu D,*

f) $(I + cA)^{-1} \leq I$ *za svaki $c > 0$ i*

g) $cA^2 (I + cA)^{-1} \leq A$ *za svaki $c > 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja a). Neka je A inverzna M–matrica. Za svaku pozitivnu dijagonalnu matricu D tada imamo:

$$A^{-1} \leq A^{-1} + D^{-1}.$$

Budući da je $A^{-1}+D^{-1}$ M–matrica, množenjem obje strane prethodne nejednakosti nenegativnom matricom $(A^{-1}+D^{-1})^{-1}$ slijedi:

$$A^{-1}(A^{-1}+D^{-1})^{-1} \leq I.$$

Algebarski, ova nejednakost ekvivalentna je sa:

$$A^{-1}[D^{-1}(A+D)A^{-1}]^{-1} \leq I,$$

što implicira:

$$(A+D)^{-1}D \leq I.$$

Budući da je prethodna nejednakost ekvivalentna sa:

$$(A+D)^{-1} \leq D^{-1},$$

dobivamo tvrdnju b). Za dokaz b) $\Rightarrow$ c), uočimo da b) implicira da $(A+D)^{-1}$ postoji. Stoga slijedi c). Implikacija c) $\Rightarrow$ d) je očita. Kako bi pokazali da d) implicira a) dovoljno je izabrati niz (α_i) koji konvergira prema nuli takav da je $\alpha_i > 0$ za svaki i. Tada je $A+\alpha_i \in M^{-1}$ tj. $A \in \overline{M_n^{-1}}$. Dakle, tvrdnje od a) do d) su ekvivalentne. Zapišimo tvrdnju $(A+D)^{-1} \leq D^{-1}$ iz b) u ekvivalentnom obliku $I-(A+D)^{-1}D \geq 0$. Iz $(A+D)^{-1}A = I-(A+D)^{-1}D$ slijedi da su b) i e) ekvivalentne. Nadalje, b) očigledno implicira f). Dokaz f) $\Rightarrow$ d) analogan je dokazu b) $\Rightarrow$ c). Ekvivalencija između f) i g) slijedi iz izraza $(I+cA)^{-1} = I-cA+c^2A^2(I+cA)^{-1}$.
□

Korolar 3.5. *Ako je A nesingularna nenegativna matrica reda n, onda je A inverzna M–matrica ako i samo ako je $A+D$ nesingularna i*

$$(A+D)^{-1}A \geq 0$$

za sve pozitivne dijagonalne matrice D reda n.

Primijetimo da u prethodnom korolaru "pozitivne dijagonalne" možemo zamijeniti sa "nenegativne dijagonalne".

Korolar 3.6. *Nilpotentna matrica A je iz $\overline{M_n^{-1}}$ ako i samo ako je $A \geq 0$ i $A^2 = 0$.*

Dokaz. Ako je $A \gg 0$ i $A^2 = 0$, onda je zadovoljena tvrdnja e) Teorema 3.4 pa imamo $A \in \overline{M_n^{-1}}$. Nadalje, neka je $A \in \overline{M_n^{-1}}$. Očito je $A \gg 0$. Budući da je A nilpotentna, permutacijskim sličnostima možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je A gornjetrokutasta (i da je $a_{ii} = 0$ za sve i). Pretpostavimo da je $A^2 \neq 0$. Neka je (i,k) par indeksa takav da je $(A^2)_{ik} \neq 0$ sa svojstvom da je $k-i$ minimalan među svim takvim parovima. Ako je $s \geq 3$, onda je

$$(A^s)_{ik} = \sum_{i<j<k} [(A^2)_{ij}(A^{s-2})_{jk} = 0, \text{ jer je } j-i < k-i,$$

zato što je A (a time i njezine potencije) gornjetrokutasta. Stoga, (i,k) element s lijeve strane od e), koji je polinom u A, je

$$\left[cA^2(I+cA)^{-1}\right]_{ik} = c(A^2)_{ik}.$$

Sada e) implicira

$$(A)_{ik} \geq c(A^2)_{ik} \text{ za sve } c > 0,$$

što je očito kontradikcija. Prema tome, $A^2 = 0$ čime je dokaz gotov.

□

Pretpostavimo sada da su sve matrice reda n. Označimo A_{ij} podmatricu od A dobivenu ispuštanjem i-tog retka i j-tog stupca.

Teorem 3.7. *Neka je A nesingularna, potpuno nenegativna matrica. Tada je A^{-1} M–matrica ako i samo ako je $\det A_{ij} = 0$ za $i + j = 2K$, pri čemu je K pozitivan cijeli broj, $i \neq j$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $A^{-1} = (a_{ij})$ M–matrica. Tada je $a_{ij} \leq 0$ za sve $i \neq j$. No $a_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ji}}{\det A}$. Budući da je A potpuno nenegativna, imamo $\det A_{ji} \geq 0$ i A nesingularna što implicira $\det A > 0$. Prema tome, $\det A_{ji} = 0$ za $i + j = 2K$ i $i \neq j$. Ako je $\det A_{ji} = 0$ za $i + j = 2K$ i $i \neq j$, onda je očito $a_{ij} \leq 0$ za $i \neq j$. Činjenica da je A^{-1} M–matrica slijedi iz Leme 3.1.

□

Nadalje ćemo promatrati matrice čiji svaki element ima M–matricu kao inverz. U tu svrhu kažemo da je $A = (a_{ij})$ matrica tipa D ako

$$a_{ij} = \begin{cases} a_i, & i \leq j, \\ a_j, & i > j \end{cases}$$

pri čemu je $a_n > a_{n-1} > \cdots > a_1$.

Teorem 3.8. *Neka je A matrica tipa D i $a_{11} > 0$. Tada je $\det A_{ij} = 0$ za $\mid i - j \mid > 1$.*

Teorem 3.9. *Neka je $A = (a_{ij})$ matrica tipa D i $a_{11} > 0$. Tada je A^{-1} trodijagonalna M–matrica.*

Dokaz. Kako je A simetrična možemo pretpostaviti $j > i + 1$. Ako je $i = 1$, onda je drugi stupac od A_{ij} višekratnik prvog stupca i $\det A_{ij} = 0$. Ako je $j = n$, onda su zadnja dva retka od A_{in} identična i $\det A_{in} = 0$. Pretpostavimo da je $i \neq 1$ i $j \neq n$. Neka je

$$\det A_{ij} = \det \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

gdje je B_1 $(i-1) \times (i+1)$, a B_4 je reda $(n-i) \times (n-i-2)$. (Primjetimo $n \geq 4$). Koristeći Laplaceov razvoj za $\det A_{ij}$ i razvojem po zadnjih $n-i$ redaka vidimo da 2 stupca moraju uvijek biti izabrani iz B_3 jer B_4 sadrži samo $n - i - 2$ stupca. Svi retci u B_3 su višekratnici prvog stupca. Prema tome, u sumi determinanti u Laplaceovom razvoju svaki izraz je jednak nuli i zbog toga je $\det A_{ij} = 0$. □

Teorem 3.10. *Ako je $A \geq 0$ i A^{-1} je M–matrica, onda su glavni minori od A nenegativni.*

Dokaz prethodnog teorema možete vidjeti u [2].

Literatura

[1] D. Bakić, Linearna algebra, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] A. Berman, R. J. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, 1994.

[3] M. Fiedler, C. R. Johnson, T. L. Markham, Notes on Inverse M–matrices, Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1987.

[4] T. L. Markham, Nonnegative matrices whose inverses are M–matrices, American Mathematical Society, 1972.,volumen 36,326. - 330. str.

[5] G. Poole, T. Boullion, A Survey on M–matrices, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1974.